新高考观下的高中数学教学思考

陈兆华

新高考“新”在哪里?

“江苏省高考数学试卷”的特征：

从结构上看，只有填空题与解答题；

从分值分布上看，小题 70 分，大题 90 分；

从难易程度上看，容易题较易且难题较难，相对中等题不是很多；

从知识点分布上看，考点与难度位置“固定”的较多，或者说变化的较少；

从考查的指导思想上看，充分尊重中学常规教学，以考查基础知识、基本能力为主.

“全国卷”的特征：

从结构上看，除了单项填空题与解答题外，多了选择题与多选题；

从分值分布上看，小题 80 分，大题 70 分，小题分值比例升高；

从难易程度上看，容易题与特难题较少，中等题非常多；

从知识点分布上看，考点与难度位置基本不定，好似“一切皆有可能”.

从考查的指导思想上看，在尊重中学常规教学的基础上，除考查基础知识、基本能力，还着重考查核心素养、应用能力、创新能力.

新课程一直倡导多开展一些学生的研究性学习，旨在培养自主研究、自主探索的习惯，从而修炼学生内在的数学素养. 新高考也更加注重考查学生的这种素养，旨在选拔真正的研究性人才.

1、关于高一高二的基础教学

高一高二基础教学，一是扎实抓好学生的基础知识，二是培养好学生的基本能力，三是积极研究如何渗透数学的六大核心素养．

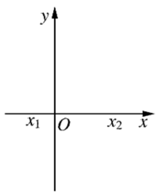
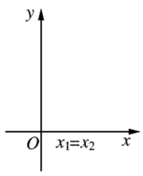
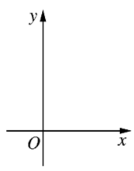
1.1 加强学生的感性认识

感性认识，常常是直觉认识，从认知规律出发，刚进高中的学生，无论从理解能力、运算能力、逻辑思维能力，都有一个渐变的过程．

在高一高二的教学中，尤其是高一的教学中，要多加强一些学生的感性认识，在适当的时机再逐步上升到理性认识．

案例 1 如二次不等式的教学，教材是在“函数与方程”这一节中的，有较多学校把这一部分内容放在“集合的运算”教学时补充的．无论在什么时候教学，大家可能也听过这些公开课，一般教学中常会出现“冷场”现象，教师讲得很累，课堂效果常常不好，本人认为都是因为有那个“表格”造成的（以下为教材中的表格）．用教材而不是机械的教教材，早已成为大家的共识，但实际教学中，多数教师仍不敢于变通．

表 2－5－1

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	方程无实数根
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$			

本人教学是用一组系列题进行讲解的，用一组“排炮”层层递进，将来再上升到理性认识自然是水到渠成．

解下列不等式：

(1) $(x-1)(x-2)>0$

(2) $(x-1)(x-2)<0$

(3) $(x+3)(x-4)>0$

(4) $(x+4)(x+1)<0$

(5) $(1-x)(x-2)>0$
(6) $(3-x)(1-x)<0$
(7) $(x-3)(x+4)\geqslant 0$
(8) $(2-3x)(x+1)\leqslant 0$

(9) $x^2-3x+2>0$
(10) $x^2-5x-6<0$
(11) $x^2+2x-2\geqslant 0$
(12) $x^2-x-3\leqslant 0$

(13) $x^2-2x+1>0$
(14) $x^2-2x+2>0$
(15) $x^2-2x+3<0$
(16) $-x^2+4x-5\leqslant 0$

多加强一些感性认识，再上升到理性认识，尤其对高一新生而言，意义更加重大．

教材中这部分内容是放在函数与方程中的，从前面的基础知识的必要性上看，可能有点滞后．若在前面教学中有所渗透，那么此时的总结，也是非常自然与简单了．

函数与方程

在 2.3.1 节中，我们利用对数求出了方程 $0.84^x=0.5$ 的近似解.

利用函数图象能求出 $0.84^x=0.5$ 的近似解吗？

利用什么方法可求出方程 $\lg x=3-x$ 的近似解？

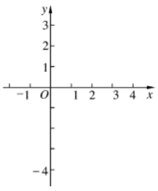
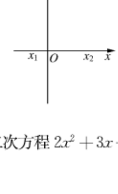
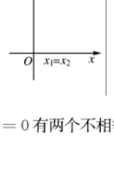
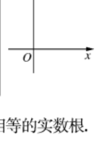


图 2－5－1 是二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象. 观察图象，指出 x 取哪些值时，$y=0$.

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的　　就是二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值为 0 时自变量 x 的值，也就是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标. 因此，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根也称为函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的　　.

当 $a>0$ 时，可以得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象之间的关系，如表2－5－1 所示.

表 2－5－1

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	方程无实数根
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$			

求证：一元二次方程 $2x^2+3x-7=0$ 有两个不相等的实数根.

因为

$$\begin{aligned}\Delta&=3^2-4\times 2\times(-7)\\&=65>0,\end{aligned}$$

所以方程 $2x^2+3x-7=0$ 有两个不相等的实数根.

案例 2 如习题教学中这样的不等式问题：

例1 已知 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1\left(x>0,y>0\right)$，求 $4x+5y$ 的最小值．

经过教师的教学，学生学会了“操作”，但若教师注意利用图形作一定的背景意义的解释，既激发学生兴趣，也是学生认清问题的本质．

这里的关键是要让学生认识到：$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1\left(x>0,y>0\right)$ 表示的图象是“过原点而必须去掉原点”的“反比例函数图象平移”的曲线．

当前教学生“会解题”的现象较多，但会“操作”更懂“原理”是教学中必须做的工作．

高一高二基础教学，培养学生的“数感、图感”尤为重要！

1.2 注重知识的发生过程

作为高一高二基础教学，因为新概念较多，所以要根据教材为主线，加强集体备课与个人备课，多想想如何讲解，既要符合学生的认识规律，又要揭示知识的发生过程，培养学生再创造的能力，培养学生严谨的科研精神．

案例 3 如对数概念教学课，如何展开教学过程，相信大家多次听过这个课题的各种公开课．本人研究过这个课，从人类认知规律出发编写的教案，供大家参考．（见《对数》教学视频）

对数函数

在第 2.2.2 节的例 4 中，我们研究了一种放射性物质不断变化为其他物质的过程. 设该物质最初的质量是 1，则经过 x 年，该物质的剩留量

$$y=0.84^x.$$

由此，知道了经过的时间 x，就能求出该物质的剩留量 y；反过来，知道了该物质的剩留量 y，怎样求出所经过的时间 x 呢？

特别地，经过多少年这种物质的剩留量为原来的一半？

上述问题也就是求满足 $0.84^x=0.5$ 中的 x，此时问题就转化为已知底数和幂的值求指数的问题.

一般地，如果 $a(a>0, a\neq 1)$ 的 b 次幂等于 N，即

$$a^b=N,$$

那么就称 b 是以 a 为底 N 的**对数**(logarithm)，记作

$$\log_a N=b,$$

其中，a 叫做对数的**底数**(base of logarithm)，N 叫做**真数**(proper number).

由对数的定义可知，$a^b=N$ 与 $b=\log_a N$ 两个等式所表示的是 a，b，N 三个量之间的同一个关系. 例如，

$$3^2=9\Leftrightarrow \log_3 9=2;$$

$$\log_4 2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}}=2.$$

根据对数的定义，要解决本节开头提出的问题，就只要计算 $\log_{0.84}0.5$ 的值.

案例 4 如习题教学中的“加权的”基本不等式问题（相当于两元的柯西不等式）.

例2 已知不等式$a+2b\leqslant k\sqrt{a^2+2b^2}$对一切正实数 a，b 恒成立，则 k 的最小值为____.

解决这样的问题，当然要追朔到基本不等式的起源：

（1）$x^2\geqslant 0$；

（2）$(a-b)^2\geqslant 0$，即 $a^2+b^2\geqslant 2ab$；

（3）$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）；

（4）$\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)\geqslant\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2$，即$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\left|x_1x_2+y_1y_2\right|$.

或$\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\left(a^2x^2+b^2y^2\right)\geqslant\left(mx+ny\right)^2$，也即$\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}}\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}\geqslant\left|mx+ny\right|$.

或$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}\geqslant\cos\theta\cdot ax+\sin\theta\cdot by$，说明了系数的“可自由调配”性.

例3 已知 $x+y=3$，求$\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{y^2+4}$的最小值.

（估计数 $x=2$，$y=1$ 时取得最小值，其实就是切线法）

$\sqrt{x^2+1}\geqslant\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}$（在 $x=2$ 时取等号），$\sqrt{y^2+4}\geqslant\dfrac{y+4}{\sqrt{5}}$（在 $y=1$ 时取等号），

则$\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{y^2+4}\geqslant\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}+\dfrac{2y+8}{\sqrt{5}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$.

一些简单竞赛题也是用这个思想命题的，如：

例4 （1）求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 的最大和最小值（2009 全国联赛试题）.

（答：最大值为 11，最小值为$3\sqrt{3}+\sqrt{13}$）

（2）已知正数 a，b 满足 $a+b=1$，求 $M=\sqrt{1+2a^2}+2\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2+b^2}$ 的最小值（2018 年湖北）.

解：$M=\sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2+1}+\sqrt{(2b)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}$

$\geqslant \sqrt{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+1\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}+2b\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{5}{6}\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ （m，$n>0$），

在 $\sqrt{2}a=\frac{1}{m}$，$2b=\frac{\frac{5}{6}}{n}$ 时取等号．代入 $a+b=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{2}m}+\frac{5}{12n}=1$．①

另一方面，令 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$，得 $n^2+1=2(m^2+1)$．②

由②知，m，n 同时增大（或同时减小），则符合①的 m，n 只能有一解.

观察，得 $m=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$n=\frac{5}{3}$ 时满足①和②，

则 $\sqrt{2a^2+1}+2\sqrt{b^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2}\geqslant\frac{5\sqrt{34}}{12}$.

当 $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{4}$ 时取等号，则 M 的最小值为 $\frac{5\sqrt{34}}{12}$.

知识的发生过程常常是从简单情况逐步走入深刻的．善于从简单情况出发，把知识以及能力推向深刻，是我们教师应该研究与做好的重要工作.

1.3 **提升学生的研究能力**

在高一高二的基础教学中，适度创设一些情境，给出有一定研究价值的问题，让学生自主研究，是培养学生能力、提升学生的数学核心素养的重要方法.

案例 5 如指数函数图象的教学，教学设计中，一般画出 4 个函数的图象，通过列表，描点，大致画出示意图，即画出 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=3^x$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象后，再对比说明一下它们的关系，便完成了指数函数图象的教学.

新的课程标准提出了“学生在数学学习上应培养数学抽象、数学推理、数学建模、数学运算、直观想象、数据分析六大核心素养”，如何在教学中有一定的体现呢？

教学中，我让学生试着画出函数 $y=x\cdot 2^x$ 的图象，这里同样也是增强学生的“数感与图感”. 增强学生遇到不熟悉的问题开展自主研究的习惯，培养学生的一些核心素养.

到了高二导数学习后，二次认识这样的问题，就非常简单了.

案例 6 如椭圆的几何性质的教学，一些老师会认为这些内容非常简单，往往一带而过，以 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 为例，如范围问题，由图一看易得 $-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$，便匆匆结束了，教学中，我会问学生，你认为 $\frac{x^2}{4}+xy+\frac{y^2}{2}=1$ 中，x 的取值范围是什么？同样它有什么样的对称性吗？

所以概念教学，教师要仔细琢磨，善于提出与概念相关问题让学生思考，即教师要思考的是如何教学才能真正培养学生的研究能力，而不是为了教知识而教概念.

例5 已知实数 x，y 满足 $3x^2+2y^2=6x$，求 x^2+y^2 的取值范围.

这是一个简单的问题，而实际教学中体现，这是一个出错率非常高的问题，其原因就是“变量之间相互制约”的意识不强造成的.

而这样的问题，不正是椭圆的范围问题吗？

案例 7 如双曲线几何性质中渐近线的教学.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的渐近线原理的解释.

学生真懂渐近线了吗？

例6 问函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为____________.

理解了渐近线的原理，直接可以看出，在（$-\infty$，1]上函数单调递减，函数值从 $\frac{3}{2}$ 减到 1；在 [2，$+\infty$）上函数单调递增，函数值从 2 增大到 $+\infty$. 则值域为 $[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$.

以上，仅从三个重要方面（**加强学生的感性认识、注重知识的发生过程、提升学生的研究能力**）来说明高一高二基础教学中值得关注研究的问题，教无定法，但教有优法，教学中要关注研究的问题还很多，本人仅提出这些观点供大家参考而已.

2、关于高三的复习工作

以下从三个方面谈谈一些个人对高三复习工作的思考。

2.1 高考试题的再认识

江苏省高考数学卷自 2021 年起使用全国新高考I卷，较以前的江苏省自主命题相比，无论在试卷结构上、试题难度分布上，都有很多变化，总体符合社会时代发展的需求，难度分布科学合理，试题也具有更好的区分度，更利于发挥高考选拔人才的功能.

新高考的主要特点有：非常容易的“送分题”很少，非常难的试题也很少，即产生较好区分度的“中等题”变得增多了，这既利于引导教学，也利于高校选拔.

新高考的主要亮点有：在立足从“逻辑推理”、“数学运算”素养的基础上，又加强了对“数学抽象”、“直观想象”、“数学建模”、“数据处理”等素养的考查.

2.1.1 考查真正的核心素养

立足核心素养考查是试题的主要特点.

例7 （2021 全国I卷第 7 题）若过点（a，b）可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线，则

A． $e^b<a$　　　*B*． $e^a<b$　　　*C*． $0<a<e^b$　　　*D*． $0<b<e^a$

此题是教学中的常规问题，有关 $y=e^x$ 的图象、切线问题学生非常熟悉．但要作出两条切线，就需要学生有较强的“直观想象”能力.从直观上看，学生可直接看出点（a，b）必须在 x 轴上方且在曲线 $y=e^x$ 的下方，从而快速找到答案为 D.

例8 （2021 全国I卷第 13 题）已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数，则 $a=$____________.

此题可用定义运算，但若善用“逻辑推理”可直接得解，因为问题等价于定义在 **R** 上的奇函数 $g(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$，根据性质 $g(0)=0$ 可得出 $a=1$.

例9 （2021 全国I卷第 19 题）某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A，B 两类问题．每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答,若回答错误则该同学比赛结束;若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答,无论回答正确与否,该同学比赛结束．A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分．

已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关．

（1）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由．

此题主要考查"数据分析"的核心素养，也是中学教学中的常规问题．

对于（1），因为 X 只能取 0，20，100，

所以 $P(X=0)=0.2$；$P(X=20)=0.8\times0.4=0.32$；$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$．

则 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

对于（2），小明先回答 A 类问题的得分期望为

$E(X_1)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$；

同理，小明先回答 B 类问题的得分期望为

$E(X_2)=0\times0.4+80\times0.6\times0.2+100\times0.6\times0.8=57.6$；

因为 $E(X_1)<E(X_2)$，所以小明应选择先回答 B 类问题．

2.1.2 体现数学的应用价值

增强应用意识，体现应用价值是新高考的重要特征之一，但由于应用题的信息量大，从阅读理解到解决问题一般要花一定的时间进行表征．2021 年高考试题中的应用题的长度、文字量等更加科学合理，同时，比 2020 年新高考 1 卷中应用题的数量大幅减少，这样更符合文理合卷的测试要求．

例10 （2021 全国I卷第 16 题）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折．规格为 $20\,\mathrm{dm}\times12\,\mathrm{dm}$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10\,\mathrm{dm}\times12\,\mathrm{dm}$，$20\,\mathrm{dm}\times6\,\mathrm{dm}$ 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240\,\mathrm{dm}^2$，对折 2 次共可以得到 $5\,\mathrm{dm}\times12\,\mathrm{dm}$，$10\,\mathrm{dm}\times6\,\mathrm{dm}$，$20\,\mathrm{dm}\times3\,\mathrm{dm}$ 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180\,\mathrm{dm}^2$，以此类推．则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为________；如果对折 n 次，那么 $\sum_{k=1}^{n}S_k=$________ dm^2．

利用不完全归纳法，对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 5；

由于 $S_1=2\times\dfrac{12\times20}{2}$，$S_2=3\times\dfrac{12\times20}{2^2}$，$S_3=4\times\dfrac{12\times20}{2^3}$，…，$S_k=(k+1)\times\dfrac{12\times20}{2^k}$，

（如何求它的前 n 项和？）

因为$S_k=240\times\left(\frac{k+2}{2^{k-1}}-\frac{k+3}{2^k}\right)$，所以$\sum_{k=1}^{n}S_k=240\times\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$.

其中求和用了拆项法，非常快捷，但若平时教学中对此研究不够，就会增加考生的运算难度与长度.

2.1.3 克服固定的试卷结构

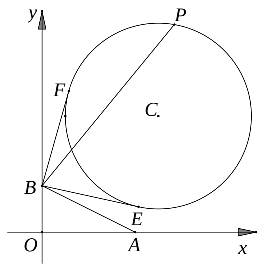
新高考增加了多选题，旨在培养学生平时养成研究问题、精准解答的良好习惯.

例11 （2021 全国I卷第 11 题）已知点P在圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$上，点$A(4,0)$，$B(0,2)$，则

A．点P到直线AB的距离小于 10　　B．点P到直线AB的距离大于 2

C．当$\angle PBA$最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$　　D．当$\angle PBA$最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

因为直线AB方程为$x+2y-4=0$，圆心到直线AB的距离为$\frac{11}{\sqrt{5}}$，



则点P到直线AB距离的最小值为$\frac{11}{\sqrt{5}}-4$，最大值为$\frac{11}{\sqrt{5}}+4$.

因为$\frac{11}{\sqrt{5}}<6$，所以A正确，B错误.

又当点P在点E处时，$\angle PBA$最小；点P在点F处时，$\angle PBA$最大，均有$|PB|=\sqrt{5^2+(5-2)^2-4^2}=3\sqrt{2}$，即$CD$均正确.

因此，选ACD.

新高考试卷努力克服各知识点考查的难度与位置相对固定的模式，通过不断变换，引导中学合理开展教学.

例12 （2021 全国I卷第 19 题）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

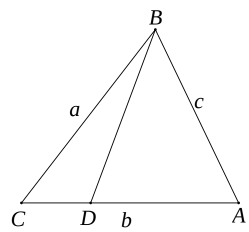
（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

以前全国卷中的三角解答题基本出现在前 2 题，因此难度一般不是太大，现将此题放在解答题第 3 题的位置，且具有中等难度，使得很多考生不适应.

对于（1），因为$BD\sin\angle ABC=a\sin C$．利用正弦定理$\frac{\sin\angle ABC}{b}=\frac{\sin C}{c}$，

得$BD\cdot b=ac$，而$b^2=ac$，所以$BD=b$；

对于（2），若$AD=2DC$，则$AD=\frac{2}{3}b$，$CD=\frac{1}{3}b$.



由（1）知 $BD=b$，设 $\angle BDA=\theta$，

由余弦定理，得 $\begin{cases} BC^2=BD^2+CD^2+2BD\cdot CD\cos\theta, \\ BA^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\theta, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a^2=b^2+\left(\dfrac{1}{3}b\right)^2+2b\cdot\dfrac{1}{3}b\cos\theta, \\ c^2=b^2+\left(\dfrac{2}{3}b\right)^2-2b\cdot\dfrac{2}{3}b\cos\theta, \end{cases}$ 也即 $\begin{cases} a^2=\dfrac{1}{9}b^2(10+6\cos\theta), \\ c^2=\dfrac{1}{9}b^2(13-12\cos\theta), \end{cases}$

因为 $b^2=ac$，所以 $(10+6\cos\theta)(13-12\cos\theta)=81$，$72\cos^2\theta+42\cos\theta-49=0$，

$(6\cos\theta+7)(12\cos\theta-7)=0$，所以 $\cos\theta=\dfrac{7}{12}$．此时，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}b$，$c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$．

则 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7}{12}$．

此题无论在思维设计上还是运算要求上都是较高要求，若没有扎实的基本功，很多考生会因为此题不能迅速解答而影响后面的解答心理和节奏．因此，新高考用知识点位置的多变性，引导中学教学中要加强学生对重点问题的扎实研究．

新课改的方向与目标

返璞归真，立足概念理解、倡导多重方法、培养探究精神，是新课改中追求的主要方向，这既利用中学开展教学，也利于高校选拔人才．

2.1.4 更加注重概念的理解

高考试题中一定有相对较多的概念型问题，旨在引导中学教学要注重概念的教学．

例13 （2021 全国I卷第 9 题）有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由这组数据得到新样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中 $y_i=x_i+c\,(i=1,2,\cdots,n)$，$c$ 为非零常数，则

A．两组样本数据的样本平均数相同　　B．两组样本数据的样本中位数相同

C．两组样本数据的样本标准差相同　　D．两组样本数据的样本极差相同

这是一组数的“平移”变换，样本平均数与中位数相应“平移”，即多增加 c，而样本标准差与样本极差均不变，所以选 CD．

常规教学中，要研究一般形态，即 $y_i=kx_i+c\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中，“$k=1$ 且 $c\neq0$”,“$k\neq1$ 且 $c=0$”,“$k\neq1$ 且 $c\neq0$”，要让学生弄明白这三种情况，因此高考中部分试题也是对常规教学的一种检查．

例14 （2021 全国Ⅰ卷第 10 题）已知 O 为坐标原点，点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则

A．$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$　　　　B．$|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　　　D．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

此题也是对教材中关于“两角和的余弦公式”概念教学的考查，若平时注重概念理解教学，则不难知 AC 正确．

例15 （2021 全国Ⅰ卷第 14 题）已知 O 为坐标原点，抛物线 C: $y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点为 F，P 为 C 上一点，PF 与 x 轴垂直，Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$．若 $|FQ|=6$，则 C 的准线方程为____________________________．

此题同样既考概念，也考方法．$|PF|=p$，$|OF|=\dfrac{p}{2}$，由 PF 与 x 轴垂直，$PQ\perp OP$，得 $|PF|^2=|OF|\cdot|FQ|$，即 $p^2=\dfrac{p}{2}\times 6$．所以 $p=3$，则 C 的准线方程为 $x=-\dfrac{3}{2}$．

2.1.5 **更加倡导多重的方法**

新高考不提供“标准答案”，意在倡导对同一问题的多重解法，不同解法当然对解题速度、解题难度有很大影响．平时教学中，应多给学生暴露自己想法的机会，形成多种问题方向、多种思考思路，以提升考生解题能力．

例16 （2021 全国Ⅰ卷第 5 题）已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为

A．13　　　　B．12　　　　C．9　　　　D．6

考生既可从基本不等式的角度思考，即由 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\dfrac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2$，易得 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为 9，选 C.

也可以用焦半径公式，设 $M(m，n)$，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|=(a+em)(a-em)=a^2-e^2m^2$．这样既可很快得最大值，也可得最小值．

由此说明，平时教学不仅仅为了找到一个答案而给出一种解法，而要力争多用一些方法帮助学生拓宽思路，培养学生的多向思维习惯．

例17 （2021 全国Ⅰ卷第 6 题）若 $\tan\theta=-2$，则 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$

A．$-\dfrac{6}{5}$　　　　B．$-\dfrac{2}{5}$　　　　C．$\dfrac{2}{5}$　　　　D．$\dfrac{6}{5}$

各类考生用不同的方法，显然所花时间有较大区别.

方法 1：最基本方法，求出$\sin\theta$，$\cos\theta$，但要分类讨论，所花时间较多；

方法 2：考生能意识到$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$，原式化简为$\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$，再分类 讨论，所花时间一般，这可能也是多数考生所用方法；

方法 3：直接用齐次化与“万能公式”：

原式$=\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta+1}\left(1+\dfrac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\right)=\dfrac{-2}{-2+1}\left(1+\dfrac{2\times(-2)}{(-2)^2+1}\right)=\dfrac{2}{5}$．选 C.

平时教学中多与学生研究一些一般性解题方法，使学生解题有明确的思路方法，是“减负”的一种表现，能力强的考生往往也体现在知道的知识与方法相对多，解题也更流畅.

例18 （2021 全国I卷第 21 题）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$．记 M 的轨迹为 C．

（1）求 C 的方程；

（2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

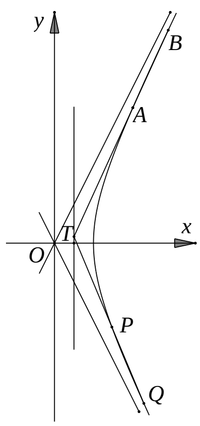
此题的第（1）问，可以根据条件直接形式，但用定义法更简便：

由定义知曲线 C 为双曲线的右支，设其方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0,x>0)$，

因为 $a=2$，$a^2+b^2=17$，所以 $b=4$，即 C 的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{16}=1(x>0)$；

对于（2），一是考生作图困难，这可能是中学教学中重视不够的问题，二是不同方法的选择对运算量与难度产生较大的影响.

由于是离开点 T 且沿直线的两个长度之积问题，这是直线参数方程中“最典型”问题，而中学教学中多数学校可能没教，因而造成考生有不同的难易认识，而这其实也是三角函数定义的问题，显然“多教胜于少教”.



设直线 AB 的倾斜角为α（$0<\alpha<\pi$），设 T（$\dfrac{1}{2}$，n），

则直线 AB 的方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+t\cos\alpha,\\ y=n+t\sin\alpha.\end{cases}$

代入 C 的方程，即$16x^2-y^2-16=0$，

得$16\left(\frac{1}{2}+t\cos\alpha\right)^2-\left(n+t\sin\alpha\right)^2-16=0$.

即$\left(17\cos^2\alpha-1\right)t^2+\left(16\cos\alpha-2n\sin\alpha\right)t-\left(n^2+12\right)=0$,

则 $|TA|\cdot|TB|=\dfrac{n^2+12}{\left|17\cos^2\alpha-1\right|}$.

同理，设直线 PQ 的倾斜角为β（$0<\beta<\pi$），可得 $|TP|\cdot|TQ|=\dfrac{n^2+12}{\left|17\cos^2\beta-1\right|}$.

因为$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，所以$\cos\alpha=\pm\cos\beta$，由于 AB 与 PQ 是两条不同直线，

所以$\alpha\neq\beta$，则$\alpha+\beta=\pi$，则$\tan\alpha+\tan\beta=0$,

即直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0 .

以上解答可见，高考中选择好的方法，既快又易．因此，中学教学中应尽量多地把一些常用方法讲到位.

2.1.6 **更加拓宽问题的探究**

教学中，要更加注重利用问题培养学生的探究精神．若仍用直接教学生知识与方法，再进行大量训练的教学模式，在考场中遇到新问题，即使问题简单，有些考生觉得没有现成模式可套，就会非常紧张导致不能顺利解答.

例19 （2021 全国I卷第 17 题）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{为奇数},\\ a_n+2, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式;

（2）求$\{a_n\}$的前 20 项和.

这是解答题中的第一题，考生感觉并非熟悉的“常规”题，但若教师在数列的教学过程中，培养学生先“把数逐一列出”，再自己观察试写通项公式，有了这种经验，解答这样的高考题，就会变得相对容易.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	···
a_n	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	

对于第（1）问，一是增强直观认识，可以列一张表看看：

从而得到数列$\{b_n\}$：2，5，8，11，14，···，则 $b_1=2$，$b_2=5$，$b_n=3n-1$.

用观察法，即使“不严谨”，但能力弱一点的考生也能得到一定的分数.

二是平时教学中仍要培养学生“严谨”的习惯，也就是写出“逻辑推理”的过程：

$b_{n+1}=a_{2n+2}=a_{2n+1}+1=a_{2n}+2+1=b_n+3$，而 $b_1=a_2=2$，所以数列$\{b_n\}$是等差数列，

则 $b_n = 3n - 1$．

对于第（2）问，同样可用逻辑推理法，但因为是有限的前 20 项求和，对能力弱一点的考生而言也可用列举法．

因为 $a_{2n+1} = a_{2n} + 2 = a_{2n-1} + 1 + 2 = a_{2n-1} + 3$，$a_1 = 1$，所以数列$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1，公差为 3 的等差数列，则 $a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3=145$，

又 $a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 10\times2+\frac{10\times9}{2}\times3=155$，所以$\{a_n\}$的前 20 项和为 $145 + 155 = 300$．

数学课如何教学更有价值

让学生敢于思考、敢于说出自己的想法，即有自主思考问题的意识，是当前教学中需要调整的做法．如例 1，若教师常常用“告诉”学生是什么答案，学生当然会“认同”，但在考试中，自己可能就不知如何思考了．所以当前教学中倡导教师充分暴露学生的想法，是教学改革的重要方向．

2.1.7 立足学生的知识理解

例20 （2021 全国Ⅰ卷第 8 题）有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球．甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则

A．甲与丙相互独立　　　　　*B*．甲与丁相互独立

C．乙与丙相互独立　　　　　*D*．丙与丁相互独立

由于部分考生并没有真正理解“两个事件独立”，而是仅凭自己的想象作答，因而失分．

因为 P（甲）$=\frac{1}{6}$，P（乙）$=\frac{1}{6}$，P（丙）$=\frac{5}{36}$，P（丁）$=\frac{1}{6}$．P（甲丙）$=0$，P（甲丁）$=\frac{1}{36}$，P（乙丙）$=\frac{1}{36}$，P（丙丁）$= 0$，有且只有 P（甲）P（丁）$=P$（甲丁），则选 B．

学生只有在平时的学生中真正理解了概念，才能以不变应万变．

2.1.8 增强学生的思维能力

例21 （2021 全国Ⅰ卷第 12 题）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则

A．当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B．当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

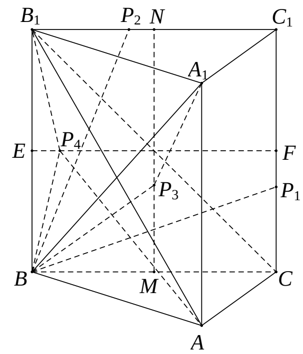
C．当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

D．当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

对于 A，当 $\lambda=1$ 时，点 P 在 CC_1 上（如图中的 P_1），当点 P 在 C 处时，$\triangle AB_1P$ 的周长为 $1+2\sqrt{2}$，当点 P 在 CC_1 中点 F 处时，$\triangle AB_1P$ 的周长为 $\sqrt{5}+\sqrt{2}$，所以 A 错误；

对于 B，当 $\mu=1$ 时，点 P 在 B_1C_1 上（如图中的 P_2），由于△PBC 的面积为 $\dfrac{1}{2}$，A 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$，为定值．所以 B 正确；

对于 C，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，设 BC 中点为 M，B_1C_1 中点为 N，点 P 在 MN 上（如图中的 P_3），因为点 P 在 M 或 N 时，均有 $\angle A_1PB=90°$，所以 C 错误；



对于 D，当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，设 BB_1 中点为 E，CC_1 中点为 F，点 P 在 EF 上（如图中的 P_4），由于 $A_1B\perp AB_1$，$A_1B\perp AC$，$AB_1\cap AC=A$，所以 $A_1B\perp$ 平面 AB_1C，而 EF 与平面 AB_1C 有且只有一个交点即为 EF 中点，所以有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P．所以 D 正确．

因此，选 BD．

关于立体几何，要努力克服传统靠坐标运算的方法判位置关系的习惯，即要加强用几何的方法解题，增强学生的直观想象的核心素养．

2.1.9 培养学生的创新意识

为了引导中学教学中培养学生的创新意识，高考试题中总有一些问题体现学生思维的创新性．而这样的题又要切合中学教学实际，所以常用对平时研究问题适当变通的方法进行考查．

例22 （2021 全国I卷第 22 题）已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

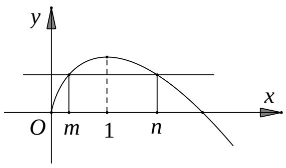
（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$．

此题的第（1）问为第（2）问作了铺垫工作．

对于（1），因为 $f(x)=x(1-\ln x)$，$x>0$，所以 $f'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$．

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，所以 $f(x)$在（0，1）上是增函数；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$，所以 $f(x)$在（1，$+\infty$）上是减函数．

对于（2），将条件两边同除以 ab，变化为 $\frac{1}{a}\ln a-\frac{1}{b}\ln b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，再变化为 $\frac{1}{a}\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\ln\frac{1}{b}\right)$，这样就与第（1）问“挂上钩了”，通过换元，令 $\frac{1}{a}=m$，$\frac{1}{b}=n$，则有 $m(1-\ln m)=n(1-\ln n)$（m，n 为两个不相等的正数），只要证 $2<m+n<\mathrm{e}$ ⋯



这已是平时经常练习的问题了.

纵上所述，新高考体现出引导课堂教学变革，推进课改关注学科本质，这不仅利于高校科学选拔人才，而且也符合时代发展对人才的需求.

2.2 常见结构的再总结

当前，为了快速解答小题，各校加强了对各知识点中的“二级结论”的研究，这是正常的一种现象，这些“经验性公式”丰富，也能反应考生的基础知识与基本能力，考试中利用这些得分也体现出考生的一部分水平．因此，对常见结构再总结、常用结论再记忆，直接利用于小题，且解答题中能补出相关过程，也是考生能力的一种体现.

例23 函数 $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{a^x-1}+2$ 是（　　）

A．奇函数　　*B*．偶函数

C．既是奇函数又是偶函数　　*D*．非奇非偶函数

显然，$y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$，$y=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$，$y=\frac{m}{a^x-1}+\frac{m}{2}$，⋯，这些与指数相关的奇偶性问题的结构，是命题的一个主要形式结构.

把多个知识点用组合的形式，或用延长的形式是形成新题的一种方式．这种“命题延长”就是把所给条件再由其他条件推出，以达到延长解题时间与延伸知识的目的．这类试题举不胜举.

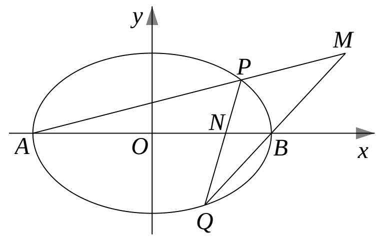
例24　（1）若 $xe^x \geqslant \ln x + x + m$ 对一切正实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是____.

（2）函数 $y = \dfrac{e^x}{x^2 - x\ln x}$ 的最小值为_______.

这些问题，是同构问题的一些常见结构.

例25　已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，过点 N（n，0）的直线与椭圆交于 P，Q，直线 AP 与 BQ 交于点 M（m，s）.

求证：mn 为定值.



若了解极点极线知识，易知结果为 a^2.

设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），若学生熟悉运算过程中，出现的结构 $\dfrac{x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2}{y_2^2 - y_1^2}$ 为定值 a^2，则结论立即可证得.

因此，教学中，把常规问题转化成一般问题，总结一般规律，也是研究性学习的一种形式.

例26 已知 A，B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 上的任意两点，则△OAB 面积的最大值为________.

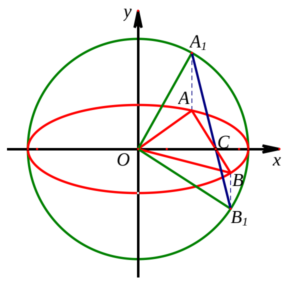
将椭圆上的每一点变为原来的 $\dfrac{a}{b}$ 倍，

则椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 变成圆 $x^2+y^2=a^2$，

此时△OAB 变成△OA_1B_1，面积放大 $\dfrac{a}{b}$ 倍，

因为△OA_1B_1 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}a^2$，

则△OAB 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}a^2\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}ab$.



椭圆的产生，有多种方法（问学生能说出多少种？），而椭圆可由圆伸缩产生，是一种通俗的方法，虽然教材中没有给出研究，但适当让学生有此认识，也是值得大家探讨的问题.

2.3 思想方法的再提炼

数学思想方法，通俗地说，说是想法，如何想、用何法.

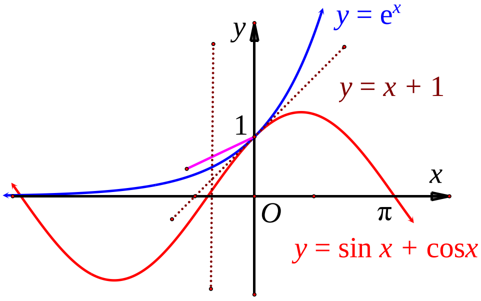
要想提升学生的思维能力、运算能力，教学中抓住宏观的指导思想是非常重要的工作，考生若能宏观设计出解题方案，才能逐步实施解决问题.

例27 （8 省联考题）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\sin x-\cos x$， $g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\sin x+\cos x$.

（1）证明：当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\geqslant 0$；

（2）若 $g(x)\geqslant 2+ax$，求 a.

本题其实就是两个函数 $u\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}$ 与 $v\left(x\right)=\sin x+\cos x$ 的关系，它们的图象都易作出，从图可以直接看出结论.



（1）因为两条曲线在（0，1）处相切，即 $y=x+1$ 是它们的公切线，它们在 y 轴左侧的距离 y 轴最近的交点在 $x=-\dfrac{5\pi}{4}$ 左侧“一点点”，因而当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\geqslant 0$，要证明此结论，最好的方法显然是分成三小段：$(-\dfrac{5\pi}{4}，-\dfrac{\pi}{4}]$，$(-\dfrac{\pi}{4}，\dfrac{\pi}{4})$，$[\dfrac{\pi}{4}，+\infty)$. 分别用正负性、单调性、有界性证明. 淋漓尽致地考查了三角函数的几个主要性质.

（2）由于它们在（0，1）处相切，$y=x+1$ 是它们的公切线，即在（0，1）附近，它们几乎都是 $x+1$，相加产生的结论就是 $2+2x$（而其他位置略大于 $2+2x$），因此产生题设结论.

证明可分三种情况：$a=2$，$a>2$，$a<2$. 第一种证明成立，第二、三种证明不成立.

如 $a>2$，则在 y 轴的右侧出现与题设矛盾；$a<2$，则在 y 轴的左侧出现与题设矛盾.

解题需要构思，而思路的产生正是通过分析而产生. 为了降低难度，可以单一进行证明.

例28 若 $\left(\dfrac{1}{x-1}+a\right)\ln x\geqslant 1$ 对一切正实数 x（$x\neq 1$）恒成立，求 a 的值.

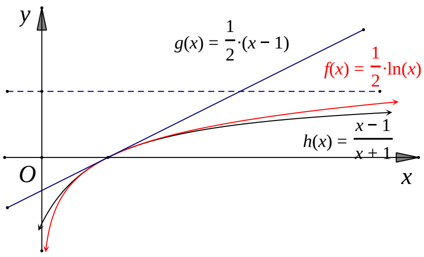
（2021 苏州 8 校联考题）

由于 $x=1$ 不能代入，直接求导运算较难，所以要对原式作变形：$\dfrac{1+a(x-1)}{x-1}\ln x\geqslant 1$，希望比较 $\ln x$ 与 $\dfrac{x-1}{1+a(x-1)}$ 的大小，从而构造新函数 $g(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{1+a(x-1)}$.

问题背景：$\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}\right)\ln x\geqslant 1$ 恒成立，即 $\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{2}\ln x\geqslant 1$.

作出 $y=\dfrac{1}{2}\ln x$ 与 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的图象，它们都过点（1，0），且有公切线为 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$，分别有：

$$\ln x\geqslant\frac{x-1}{x+1}(x>1)\text{ 与 }\ln x\leqslant\frac{x-1}{x+1}(0<x<1).$$



例29 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+m}{x^2}$ 与函数 $g(x)=m-\ln x$ 图象的交点个数.

解：由 $f(x)=g(x)$，得 $\dfrac{\ln x+m}{x^2}=m-\ln x$，即 $\ln x+m=mx^2-x^2\ln x$，

即 $(x^2+1)\ln x=m(x^2-1)$，即 $\ln x=m\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. ……

例30 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}$，$g(x)=x-2$，则 $f(x)=g(x)$ 的所有根之和等于______；不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的所有解的区间长度和等于________.

讲解中，可问学生：你会画图吗？

将 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象均向左平移 2 个单位，可以得知两个函数均为奇函数，说明原来的两个函数均关于点（2，0）对称.

解：设 $F\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$，则 $F\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x}$，

因为 $F\left(-x\right)=-F\left(x\right)$，则 $F(x)$是奇函数，所以 $F(x)=x$ 有四个根，两两关于原点对称，

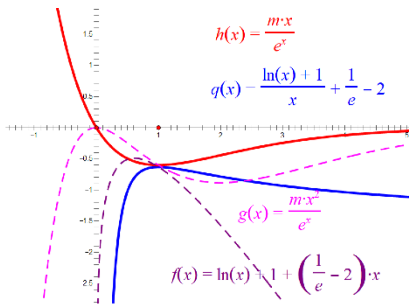
四根这和为 0，则 $f(x)=g(x)$ 的所有根之和等于 8；

不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的所有解的区间长度和等于 $F(x)\geqslant 1$ 的所有解的区间长度和.

由 $F(x)=1$，得 $2x^2+x^2-1=x^3-x$，即 $x^3-3x^2-x+1=0$，共有三个根，设为 x_1，x_2，x_3，（$x_1<x_2<x_3$），作图知，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的所有解的区间分别为（-1，x_1），（0，x_2），（1，x_3），所以区间长度和为（x_1+1 ）$+x_2+$（x_3-1）$=x_1+x_2+x_3=3$.

如函数关系变形（凹凸性调整）的重要性

例31 若 $\dfrac{mx^2}{\mathrm{e}^x}\geqslant \ln x+1-x+\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x$ （$m<0$）① 恒成立，求 m 的取值范围.



关键是把原函数调整为

$\dfrac{mx}{\mathrm{e}^x}\geqslant\dfrac{\ln x+1}{x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}-2$ （$m<0$）② 恒成立.

其效果图如右，（易得分界线为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$）

②式左边在 $x=1$ 时取得最小值，右边在 $x=1$ 时取得最大值，

所以只要 $x=1$ 时成立，则 $\dfrac{m}{\mathrm{e}}\geqslant 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}-2$，即 $m\geqslant 1-\mathrm{e}$，

总之，m 的取值范围是 $[1-\mathrm{e},0)$.

变换视角的重要性．如：

例32　若不等式$(ax-1)(\ln x+ax)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，则$a$的取值范围是________．

答案：$(-\infty,-\frac{1}{e}]\cup\{e\}$．

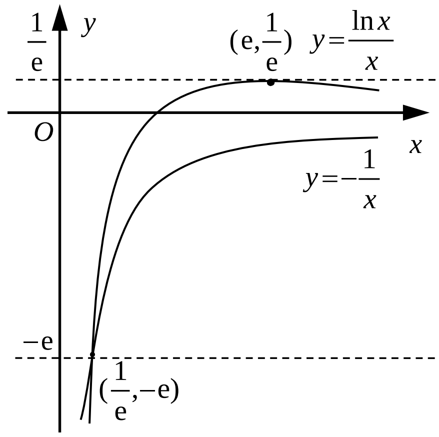
多种认识的角度：

不等式等价于$\left(a-\frac{1}{x}\right)\left(a+\frac{\ln x}{x}\right)\geqslant 0$．

作出$y=-\frac{1}{x}$与$y=\frac{\ln x}{x}$的图象，

向上平移a个单位后同号，

则$a=e$，或$a\leqslant -\frac{1}{e}$．



高考中的能力题，一定含有丰富的思想方法，教学中，对于这些能力试题，多引导学生产生思想方法更重要．

以上针对高三复习工作给出了三点想法（**高考试题的再认识、常见结构的再总结、思想方法的再提炼**），是本人对这些方面的一些粗浅认识，这是都是比较大的话题，想全面概括是有一定难度的．以上仅从这三个方面，举了一些例子，旨在通过这些例子说明这些观点，仅供大家参考而已．

谢谢大家！